Ministerul Educaţiei şi Cercetării

Olimpiada Naţională de Matematică 2007

Etapa judeţeană şi a Municipiului Bucureşti

3 martie 2007

CLASA A IX-A

Subiectul 1. Spunem că o funcţie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ are proprietatea $(\mathcal{P})$ dacă pentru orice $y \in \mathbb{N}$ ecuaţia $f(x) = y$ are exact 3 soluţii.
a) Să se arate că există o infinitate de funcţii cu proprietatea $(\mathcal{P})$;
b) Să se determine funcţiile monotone cu proprietatea $(\mathcal{P})$;
c) Să se determine dacă există funcţii monotone $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ cu proprietatea $(\mathcal{P})$.

Subiectul 2. Fie triunghiul ABC şi punctele $M \in (AB)$, $N \in (BC)$, $P \in (CA)$, $R \in (MN)$, $S \in (NP)$, $T \in (PM)$, astfel încât

$$\frac{AM}{MB} = \frac{BN}{NC} = \frac{CP}{PA} = \lambda,\ \frac{MR}{RN} = \frac{NS}{SP} = \frac{PT}{TM} = 1 - \lambda,\ \lambda \in (0,1).$$

a) Să se demonstreze că triunghiul STR este asemenea cu triunghiul ABC;
b) Să se determine valoarea parametrului λ astfel încât aria triunghiului STR să fie minimă.

Subiectul 3. Să se determine funcţiile $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ pentru care

$$x^2 + f(y) \text{ divide } f(x)^2 + y$$

pentru orice $x, y \in \mathbb{N}^*$.

Subiectul 4. Fie trei vectori coplanari $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$, fiecare de modúl 1.
a) Să se demonstreze că putem alege semnele $+$, $-$, astfel încât să avem $|\pm \mathbf{u} \pm \mathbf{v} \pm \mathbf{w}| \leq 1$;
b) Să se dea un exemplu de trei vectori $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ unde, oricum am alege semnele $+$, $-$, să avem $|\pm \mathbf{u} \pm \mathbf{v} \pm \mathbf{w}| \geq 1$.

Timp de lucru 3 ore
Toate subiectele sunt obligatorii